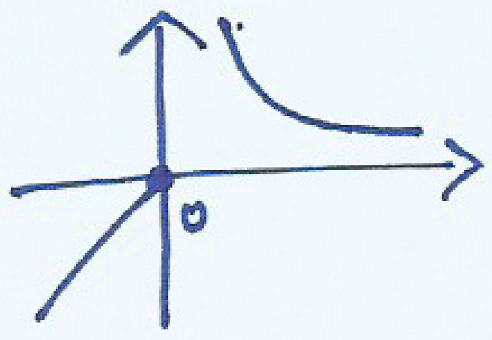
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1 Σχολικό σελ. 31

A2 Σχολικό σελ. 23

A3 (α) ψευδής (β)



$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

A4 (α) Σ (β) Λ (γ) Λ (δ) Λ (ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1 $f : (1, +\infty)$ με $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = e^x$

$$D_{fog} = \{ x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f \}$$
$$= \{ x \in \mathbb{R} \text{ και } e^x > 1 \}$$
$$= \{ x \in \mathbb{R} \text{ και } e^x > e^0 \}$$
$$\Downarrow e^x \nearrow$$
$$= \{ x \in \mathbb{R} \text{ και } x > 0 \}$$
$$= (0, +\infty)$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}, \quad x \in (0, +\infty)$$

B2 Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με

$$(fog)(x_1) = (fog)(x_2)$$
$$\frac{e^{x_1} + 2}{e^{x_1} - 1} = \frac{e^{x_2} + 2}{e^{x_2} - 1}$$
$$(\cancel{e^{x_1} e^{x_2}} - e^{x_1} + 2e^{x_2} - \cancel{2}) = (\cancel{e^{x_1 + x_2}} + 2e^{x_1} - e^{x_2} - \cancel{2})$$
$$3e^{x_2} = 3e^{x_1}$$
$$e^{x_2} = e^{x_1}$$

$e^x \nearrow$ "1-1" $\Downarrow$

$x_1 = x_2$ άρα fog 1-1 άρα αντιστρέφεται

$(f\circ g)(x) = y$

$$\frac{e^x+2}{e^x-1} = y$$

$$e^x+2 = y(e^x-1)$$

$$e^x+2 = ye^x - y$$

$$ye^x - e^x = 2+y$$

$$e^x(y-1) = 2+y$$

$$e^x = \frac{y+2}{y-1}, \quad y \neq 1$$

$\Downarrow$ ${\ln x}$ "1-1"

$$\frac{y+2}{y-1} > 0$$

$$\ln e^x = \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right), \quad y \neq 1 \quad \text{και} \quad (y+2)(y-1) > 0$$

$$y < -2 \quad \text{ή} \quad y > 1$$

$$x = \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right), \quad y \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$

$$f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right), \quad \ldots$$

$$f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right), \quad x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$

$\boxed{B3}$ $h(x) = 2x^5 + 3e^x - 3 \qquad D_h = \mathbb{R}$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$

$x_1 < x_2$

$x_1^5 < x_2^5$

$\boxed{2x_1^5 < 2x_2^5}$ (1)

$x_1 < x_2$ $\Downarrow e^x \uparrow$

$e^{x_1} < e^{x_2}$

$3e^{x_1} < 3e^{x_2}$

$\boxed{3e^{x_1} - 3 < 3e^{x_2} - 3}$ (2)

$(1) + (2) \Rightarrow h(x_1) < h(x_2) \Rightarrow h \nearrow \mathbb{R}$

$\boxed{B4}$ $2x^5+3e^x=3$

$2x^5+3e^x-3=0$

$h(x)=0$

$h(x)=h(0)$ $\quad [h(0)=2\cdot 0^5+3\cdot e^0-3=3-3=0]$

προφανής ρίζα : $x=0$

και αφού $h \uparrow \mathbb{R}$ τότε μοναδική

ΘΕΜΑ Γ

$\boxed{\Gamma 1}$ (α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{\sqrt{x^2-3}-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\alpha\mu.}{=}} \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(x-2)(x+\frac{1}{2})(\sqrt{x^2-3}+1)}{(\sqrt{x^2-3}-1)(\sqrt{x^2-3}+1)}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(x-2)(x+\frac{1}{2})(\sqrt{x^2-3}+1)}{x^2-3-1}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2\cancel{(x-2)}(x+\frac{1}{2})(\sqrt{x^2-3}+1)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=$

$=\dfrac{2(2+\frac{1}{2})(\sqrt{2^2-3}+1)}{2+2}=\dfrac{10}{4}=\dfrac{5}{2}$

(β) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{|x+2|}{x^2-4}$ $\quad \lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{-\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}}=\dfrac{-1}{-4}=\dfrac{1}{4}$ $\quad \lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{\cancel{x+2}}{(x-2)\cancel{(x+2)}}=\dfrac{1}{-4}=-\dfrac{1}{4}$ $\rightarrow$ δεν υπάρχει

(γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 x-2\eta\mu x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x\,(\eta\mu x-2)}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\dfrac{\eta\mu x-2}{x+1}\right]$

$=1\cdot\dfrac{\eta\mu 0-2}{0+1}=-2$

(δ) $2x-x^2\le f(x)\le 2x+x^2$

• Αν $x>0$: $\dfrac{2x-x^2}{x}\le\dfrac{f(x)}{x}\le\dfrac{2x+x^2}{x}$

$\dfrac{\cancel{x}(2-x)}{\cancel{x}}\le\dfrac{f(x)}{x}\le\dfrac{\cancel{x}(2+x)}{\cancel{x}}$

$\lim_{x\to 0^+}(2-x)=2$, $\lim_{x\to 0^+}(2+x)=2$ $\xrightarrow[\text{παρεμβολής}]{\text{κριτήριο}}$ $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=2$

• Αν $x<0$: $\frac{2x-x^2}{x} \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{2x+x^2}{x}$

ομοίως υπολογίζουμε $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=2$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$

Γ2 $D_f=\mathbb{R}$.

Ισχύει $|x-3|\geq 0$

$-2|x-3|\leq 0$

$1-2|x-3|\leq 1$

$f(x)\leq 1$

$f(x)\leq f(3)$

Άρα, η f παρουσιάζει ολ. μέγιστο στη θέση $x=3$ το $f(3)=1$

Γ3 (α) Επειδή $f \nearrow \Rightarrow f$ 1-1 $\Rightarrow f$ αντιστρέφεται

(β) $D_{f^{-1}}=f(A)=[-2,2]$

(γ) $f^{-1}(2)$. Αφού $f(5)=2 \Leftrightarrow f^{-1}(f(5))=f^{-1}(2)$

$\Leftrightarrow 5=f^{-1}(2)$

(δ).